

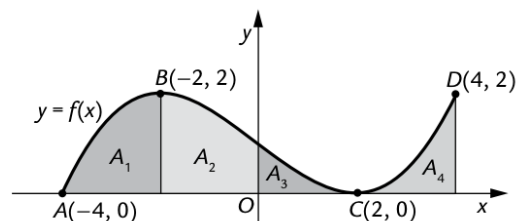
Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 degli 8 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1

La figura mostra il grafico Γ della funzione derivabile $y = f(x)$ per $x \in [-4, 4]$. Γ presenta due punti stazionari in B e C e le aree delle regioni di piano A_1, A_2, A_3 e A_4 sono rispettivamente

$\frac{11}{4}, \frac{13}{4}, \frac{3}{4}$ e $\frac{5}{4}$. Sia F la funzione integrale di f relativa al punto $x = 0$:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$



- Calcola $F(-4), F(-2), F(0), F(2)$ e $F(4)$. Individua i punti di massimo, di minimo e di flesso della funzione F, quindi traccia il suo grafico.
Determina l'equazione della retta t tangente al grafico di F nel suo punto di ascissa 4.
- Deduci, motivando adeguatamente le risposte, il valore dei seguenti integrali:
 - $\int_{-2}^{+2} x f(x^2) dx$
 - $\int_{-2}^{+4} f(|x|) dx$
 - $\int_{-1}^{+3} f(2x - 2) dx$
- Verifica che la funzione F soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-4, 4]$ e determina il numero dei valori c che soddisfano la tesi del teorema stesso.
- Supponendo che la funzione $f(x)$ sia un polinomio di terzo grado, determina l'espressione analitica della funzione integrale $F(x)$ e calcola l'area della regione di piano delimitata dal grafico di F, dalla retta t e dalla retta di equazione $y = -6$.

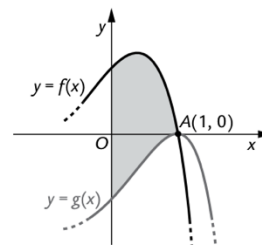
Problema 2

Considera le curve di equazione: $f(x) = e^{\frac{x^2+ax}{x^2+a}}$, con $a > 0$.

- Determina le coordinate dei punti A e B (con $x_A < x_B$) per i quali passano tutte le curve del fascio e verifica che tutte sono tangenti in A alla stessa retta t . Scrivi l'equazione di t .
- Determina il valore del parametro a per il quale la funzione ha un punto stazionario in $x = 3$.
Assumi, d'ora in avanti, di avere $a = 3$, studia la funzione corrispondente fino alla derivata prima e tracciane il grafico.
Sulla base delle informazioni note, quanti potrebbero essere i punti di flesso per la funzione? Motiva la risposta e poi, aiutandoti con la calcolatrice grafica, stabilisci il numero esatto.
- Detta s la retta tangente al grafico della curva in B, calcola l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalle rette s e t . Esprimi il risultato in gradi e primi sessagesimali.
- Deduci da f le caratteristiche principali della funzione $g(x) = \ln f(x)$ e tracciane il grafico.
Scrivi l'espressione analitica della funzione g e calcola l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico di g e dalla retta r tangente al suo grafico in $x = 0$.

Questionario

1. La figura mostra le curve di equazione $f(x) = (1 - x^2)e^x$ e $g(x)$ che è una primitiva di f . Individua l'espressione analitica di g e calcola l'area della porzione di piano colorata.



2. Nello spazio, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali, sono date le rette

$$r: \begin{cases} x - 2 = 2z \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = y + 1 \\ z = 2y \end{cases}$$

Determina l'equazione del piano che contiene la retta r e risulta parallelo alla retta s .

3. Data la funzione $f(x) = x \log_2 x - x - 1$, spiega perché essa non è invertibile in tutto il suo dominio. Dopo aver verificato che la funzione si annulla per $x = \alpha$, con $2 < \alpha < 3$, mostra che invece la funzione è invertibile nell'intervallo $(\alpha, +\infty)$. Detta $F(x)$ la funzione inversa di $f(x)$ in tale intervallo, scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di $F(x)$ nel punto di ascissa 3.
4. Determina per quale/i valore/i di k la tangente al grafico della funzione $f(x) = \ln x^2$ nel punto di ascissa $x = k$ passa per l'origine degli assi.
5. Data una funzione del tipo $f(x) = \frac{k}{1+x^2}$, stabilisci se può essere considerata come funzione densità di probabilità di una variabile aleatoria X . In caso affermativo, determina il valore di k affinché essa lo sia, calcola il valor medio e la probabilità che $0 < X < 1$. In caso negativo, spiega esaurientemente perché.
6. Individua il punto della parabola di equazione $x = 1 - y^2$ più vicino al punto $A(1, 3)$.
7. Classifica i punti di non derivabilità della funzione $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^2$ e della funzione $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
8. Calcola il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\int_4^{x^2} \sqrt{1 + \sin \pi t} \, dt}{x^2 - 4}$$