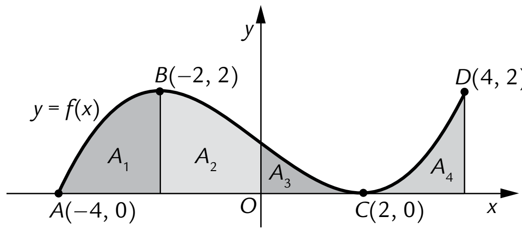
# Simulazione 1

**Risolvi 1 dei 2 problemi e 4 degli 8 quesiti in cui si articola il questionario.**



## Problema 1

La figura mostra il grafico $\Gamma$ della funzione derivabile $y = f(x)$ per $x \in [-4, 4]$. $\Gamma$ presenta due punti stazionari in $B$ e $C$ e le aree delle regioni di piano $A_1$, $A_2$, $A_3$ e $A_4$ sono rispettivamente $\frac{11}{4}$, $\frac{13}{4}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{4}$.




Sia $F$ la funzione integrale di $f$ relativa al punto $x = 0$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

**1** Calcola $F(-4)$, $F(-2)$, $F(0)$, $F(2)$ e $F(4)$. Individua i punti di massimo, di minimo e di flesso della funzione $F$, quindi traccia il suo grafico. Determina l'equazione della retta $t$ tangente al grafico di $F$ nel suo punto di ascissa 4.

**2** Deduci, motivando adeguatamente le risposte, il valore dei seguenti integrali:

**a.** $\int_{-2}^{+2} xf(x^2)dx$

**b.** $\int_{-2}^{+4} f(|x|)dx$

**c.** $\int_{-1}^{3} f(2x-2)dx$

**3** Verifica che la funzione $F$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-4, 4]$ e determina il numero dei valori $c$ che soddisfano la tesi del teorema stesso.

**4** Supponendo che la funzione $f(x)$ sia un polinomio di terzo grado, determina l'espressione analitica della funzione integrale $F(x)$ e calcola l'area della regione di piano delimitata dal grafico di $F$, dalla retta $t$ e dalla retta di equazione $y = -6$.

## Problema 2

Considera le curve di equazione:

$$f(x) = e^{\frac{x^2+ax}{x^2+a}}, \qquad \text{con } a > 0.$$

**1** Determina le coordinate dei punti $A$ e $B$ (con $x_A < x_B$) per i quali passano tutte le curve del fascio e verifica che tutte sono tangenti in $A$ alla stessa retta $t$. Scrivi l'equazione di $t$.

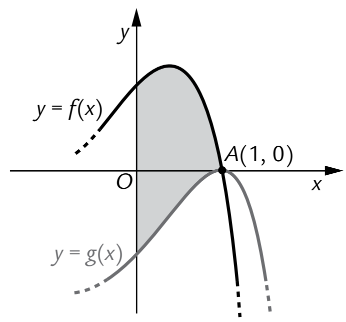
**2** Determina il valore del parametro $a$ per il quale la funzione ha un punto stazionario in $x = 3$. Assumi, d'ora in avanti, di avere $a = 3$, studia la funzione corrispondente fino alla derivata prima e tracciane il grafico. Sulla base delle informazioni note, quanti potrebbero essere i punti di flesso per la funzione? Motiva la risposta e poi, aiutandoti con la calcolatrice grafica, stabilisci il numero esatto.

**3** Detta $s$ la retta tangente al grafico della curva in $B$, calcola l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalle rette $s$ e $t$. Esprimi il risultato in gradi e primi sessagesimali.

**4** Deduci da $f$ le caratteristiche principali della funzione $g(x) = \ln f(x)$ e tracciane il grafico. Scrivi l'espressione analitica della funzione $g$ e calcola l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico di $g$ e dalla retta $r$ tangente al suo grafico in $x = 0$.

## Questionario

**1** La figura mostra le curve di equazione $f(x) = (1 - x^2)e^x$ e $g(x)$ che è una primitiva di $f$.
Individua l'espressione analitica di $g$ e calcola l'area della porzione di piano colorata.




**2** Nello spazio, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali, sono date le rette $r$: $\begin{cases} x - 2 = 2z \\ y = 1 \end{cases}$ e $s$: $\begin{cases} x = y + 1 \\ z = 2y \end{cases}$.
Determina l'equazione del piano che contiene la retta $r$ e risulta parallelo alla retta $s$.

**3** Data la funzione $f(x) = x\log_2 x - x - 1$, spiega perché essa non è invertibile in tutto il suo dominio. Dopo aver verificato che la funzione si annulla per $x = \alpha$, con $2 < \alpha < 3$, mostra che invece la funzione è invertibile nell'intervallo $(\alpha, +\infty)$. Detta $F(x)$ la funzione inversa di $f(x)$ in tale intervallo, scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di $F(x)$ nel punto di ascissa 3.

**4** Determina per quale/i valore/i di $k$ la tangente al grafico della funzione $f(x) = \ln x^2$ nel punto di ascissa $x = k$ passa per l'origine degli assi.

**5** Data una funzione del tipo $f(x) = \dfrac{k}{1 + x^2}$, stabilisci se può essere considerata come funzione densità di probabilità di una variabile aleatoria $X$. In caso affermativo, determina il valore di $k$ affinché essa lo sia, calcola il valor medio e la probabilità che $0 < X < 1$. In caso negativo, spiega esaurientemente perché.

**6** Individua il punto della parabola di equazione $x = 1 - y^2$ più vicino al punto $A(1, 3)$.

**7** Classifica i punti di non derivabilità della funzione $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^2$ e della funzione $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

**8** Calcola il seguente limite: $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{\int_4^{x^2} \sqrt{1 + \sin \pi t}\, dt}{x^2 - 4}$.