ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

SIMULAZIONE SECONDA PROVA SCRITTA

Indirizzo: LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

Problema 1

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, ortogonale e monometrico, si consideri la regione R, finita, limitata dagli assi cartesiani e dalla parabola γ di equazione $y = 6 - x^2$.

a) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno all'asse y
b) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno alla retta $y = 6$
c) Si determini il valore di k per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di R
d) Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a γ nel suo punto di ascissa t. Si determini $A(1)$. Si determini il valore di t per il quale $A(t)$ è minima.

Problema 2

Nel piano Oxy sono date le curve γ ed r di equazioni:

$$\gamma: \quad x^2 = 4(x - y) \qquad\qquad r: \; 4y = x + 6$$

a) Si provi che γ ed r non hanno punti in comune
   Si trovi il punto $P \in \gamma$ che ha distanza minima da r.
b) Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da γ e dalla retta s, simmetrica di r rispetto all'asse x.
c) Si determini il valore di c per il quale la retta $y = c$ divide a metà l'area della regione S del primo quadrante compresa tra γ e l'asse x.
d) Si determini il volume del solido di base S le cui sezioni, ottenute con piani ortogonali all'asse x sono quadrati.

Quesiti

1. Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 - 2x + 1 & per\ x < 2 \\ x^2 + (k-1)x - 1 & per\ x \geq 2 \end{cases}$$

determinare, se possibile, k in modo che la funzione $f(x)$ e la sua derivata siano continue in tutto l'insieme di definizione.

2. Rappresentare il grafico della funzione $f(x) = \left|\frac{3-2x}{x-3}\right|$. Verificare se negli intervalli $[0,2]$ e $[4,6]$ valgono le ipotesi del teorema di Lagrange, e in caso affermativo trovare i punti la cui esistenza è prevista dal teorema. Esiste un intervallo $[a, b\ ]$ in cui si possa applicare il teorema di Rolle? Giustifica la risposta.

3. Si calcoli l'altezza e il raggio del cilindro circolare retto con volume massimo, inscrivibile in una sfera di raggio $\sqrt{3}$.

4. Calcolare il valor medio della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & se\ 1 \leq x \leq 3 \\ e^{x-3} + 1 & se\ \ 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

nell'intervallo $[1,6]$ e determinare il valore della x in cui la funzione assume il valor medio.

5. Si determinino le costanti a, b in modo che la funzione $F(x) = acosx + bcos^3x$ sia la primitiva della funzione $f(x) = 3senx - 2sen^3x$

6. Calcolare il limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(cosx - 1)}{ln(cos^2x)}$$

7. Verificare che la funzione $y = x^3 + 2e^x$ è invertibile $\forall\ x\ \in R$ e calcolare la derivata della funzione inversa nel punto $y_0 = 2$.

8. Trovare per quali valori dei parametri a e b le due curve di equazione:

$$y = ae^{2(x-1)} \qquad y = \frac{x+b}{x^2}$$

sono tangenti nel punto P di ascissa 1 e scrivere l'equazione della tangente comune.